α EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN (11)

Stets ist V ein K-Vektorraum über dem Körper K; $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$

β Invarianter Teilraum (11.1)

Sei $U \subseteq V$ ein Teilraum.
U heißt φ-invariant :⇔ $\varphi(U) \subseteq U$

Dann ist $\varphi|U \in \mathrm{End}_K(U)$ [φ beschränkt auf U] [und $v+U \mapsto \varphi(v)+U$ ein Endomorphismus von V/U].

Bemerkung

Sei $\dim_K(V)<\infty$; Sei $U \subseteq V$ φ-invariant
Nach 5.5 [Basisaustauschsatz von Steinitz] existiert eine (geordnete) Basis B von V, die eine Basis B_U von U ergänzt. Dann ...
$_B\varphi_B = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ [oberer Teil (A und *) ist B_U], $A = {}_{B_U}(\varphi|U)_{B_U}$ [A' ist Matrix zu φ bezüglich (B mod U)]

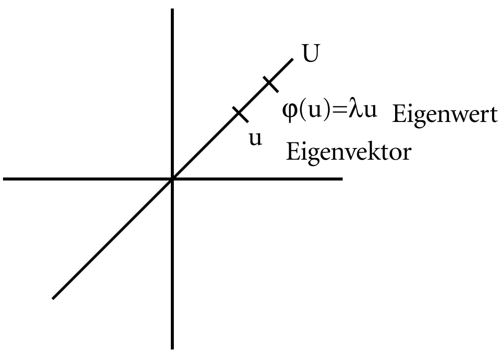
Ist $V=U \oplus U'$ und auch U' φ-invariant, so $_B\varphi_B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ [oberer Teil B_U, unterer $B_{U'}$] bei passender Wahl von B [⊕ direkte Summe von Vektorräumen, $U+U'=V$ und $U \cap U'=\{0\}$ muß gelten]

β Eigenwerte (11.2)

Sei $\lambda \in K$.
λ Eigenwert von φ :⇔ Es gibt $0 \neq u \in V$ mit $\varphi(u)=\lambda u$ $[=\lambda \cdot \mathrm{id}_V(u)]$
(dann heißt u **Eigenvektor** von φ zum **Eigenwert** λ)
⇔ Es gibt $0 \neq u \in V$ mit $(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi)(u) = \lambda u - \varphi(u) = 0$
⇔ $\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi$ ist nicht injektiv [0 auch wenn man ≠0 einsetzt]
⇔ $\mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi) \neq \{0\}$ [bezieht sich auf u, d. h. u≠0]

Man nennt $V_{\varphi,\lambda} = \mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi)$ den **Eigenraum** von φ bezüglich λ (φ-invarianter Teilraum).

Man nennt die Menge der Eigenwerte von φ das **Spektrum** von φ.



Bemerkungen

Sei $\dim_K(V)=n \in \mathbb{N}_+$, $\lambda \in K$

(a) λ Eigenwert von φ ⇔ $V_{\varphi,\lambda} = \mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi) \neq \{0\}$
⇔ $\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi$ nicht injektiv (nicht bijektiv)
$\overset{9.7}{\Leftrightarrow} \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi) = 0$

(b) Sei $A \in M_n(K)$. λ Eigenwert von A :⇔ Es gibt $0 \neq x \in K^n$ mit $A \cdot x = \lambda x$ (dann x Eigenvektor von A bezüglich λ)
⇔ Es gibt $0 \neq x \in K^n$ mit $(\lambda I_n - A)x = 0$
⇔ $\det(\lambda I_n - A) = 0$

Hinweis

Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda=\{x\in K^n \mid (\lambda I_n\text{-}A)x=0\}=L(\lambda I_n\text{-}A,0)$ (homogenes Gleichungssystem!)

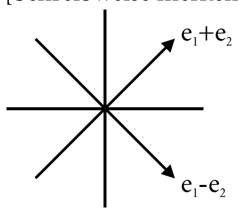
Beispiele (11.3)

(1) V und {0} sind φ-invariant (uninteressant)

(2) $\varphi=\mathrm{id}_V$ 1 einziger Eigenwert, Eigenraum V
$\varphi=0\in \mathrm{End}_K(V)$ 0 einziger Eigenwert, Eigenraum V

(3) 0 Eigenwert von φ ⇔ φ nicht injektiv ⇔ $\mathrm{Ker}(\varphi)\neq\{0\}$ $[0\cdot \mathrm{id}_V]$

(4) Sei $V=\mathbb{R}^2$ mit der kanonischen Basis $E=(e_1,e_2)$
(a) φ sei die Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.
$A={}_E\varphi_E=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; Bezüglich $B=(e_1+e_2,e_1\text{-}e_2)$ gilt ${}_B\varphi_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ [z. B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B$]
(φ ist diagonalähnlich, dann Eigenwerte gut erkennbar)
1 und -1 sind Eigenwerte von φ (oder A) [dann det 0, da 0-Zeile/Spalte]
$V_{\varphi,1}=\mathbb{R}(e_1+e_2)$ $[A\cdot x=1\cdot x$ erzeugt erste Winkelhalbierende]; $V_{\varphi,-1}=\mathbb{R}(e_1\text{-}e_2)$ $[A\cdot x=-1\cdot x$ erzeugt zweite]
[Schreibweise merken]



(b) φ sei die Drehung um π/2. φ hat keinen echten φ-invarianten Teilraum (daher auch keinen Eigenwert).
Beweis
$A={}_E\varphi_E=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (nicht diagonalähnlich)
Für $t\in\mathbb{R}$ gilt $\det(tI_2\text{-}A)=\det(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})=\det(\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix})=t^2+1$
λ=t Eigenwert von A [oder φ] ⇔ $\lambda^2+1=0$, nicht möglich, existiert nicht

(5) Sei $\dim_K(V)=2$ und $A={}_B\varphi_B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Basis $B=(v_1,v_2)$
Gegeben: 0 ist Eigenwert von φ [oder A]; v_1 ist Eigenvektor von φ zu 0
Behauptung: φ (oder A) ist nicht diagonalähnlich
Beweis
Annahme: Es geht doch, d.h. es gibt $S\in GL_2(K)$ mit $SAS^{-1}=D=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$
$A^2=0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}=D^2=(SAS^{-1})(SAS^{-1})=SA^2S^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [Quadrierung macht dies erkennbar]
Folglich $a_1^2=0=a_2^2$, d.h. $a_1=0=a_2$, aber $1=\mathrm{rang}(A)=\mathrm{rang}(D)=0$ ↯

Satz (11.4)

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Beweis

Seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ paarweise verschiedene Eigenwerte von φ, $u_1,\ldots,u_r$ entsprechende Eigenvektoren.
Behauptung: $u_1,\ldots,u_r$ sind linear unabhängig.
Induktion nach r.

Induktionsanfang
Für r=1 ...
Ok, da $u_1\neq 0$
Für r=2 ...
Seien $c_1,c_2\in K$ mit ① $0=c_1u_1+c_2u_2$ und da φ K-Linear folgt [$0=\varphi(0)$, + auseinanderziehen, Skalar herausziehen]

② (Anwendung von φ) $0=\varphi(0)=\varphi(c_1u_1+c_2u_2)=c_1\varphi(u_1)+c_2\varphi(u_2)=c_1\lambda_1u_1+c_2\lambda_2u_2$
Damit ②-$\lambda_1$①: $0=c_2\lambda_2u_2-c_2\lambda_2u_2=c_2(\lambda_2-\lambda_1)u_2$; $\lambda_2\neq\lambda_1$; $u_2\neq0 \Rightarrow c_2=0$; $c_1=0$ (analog mit ②-$\lambda_2$① folgt)

Induktionsschritt
① $0=c_1u_1+c_2u_2+...+c_ru_r$
② $0=\varphi(0)=c_1\lambda_1u_1+c_2\lambda_2u_2+...+c_r\lambda_ru_r$
Nun ergibt ②-$\lambda_1$① die neue Gleichung ①.
$0=0+c_2(\lambda_2-\lambda_1)u_2+...+c_r(\lambda_r-\lambda_1)u_r$
$\lambda_2-\lambda_1\neq0$, $\lambda_r-\lambda_1\neq0$, damit $c_2=...=c_r=0$ und außerdem $c_1u_1=0$, da $u_1\neq0$ also $c_1=0$, folglich linear unabhängig [aus ①]

Folgerung

Sei $\dim_K(V)=n\in\mathbb{N}_+$, dann hat φ höchstens n verschiedene Eigenwerte [Kardinalität der Basis] [Wie Polynome und Nullstellen].

Charakteristisches Polynom (11.5)

Sei $\dim_K(V)=n\in\mathbb{N}_+$. Für jedes $t\in K$ definiere ...
$\mathbf{p_\varphi(t):=\det(t\cdot id_V-\varphi)}$ [Alle Einträge auf der Hauptdiagonalen t mit -φ] [Damit det 0 bei Nullstellen]

Nach 10.6 gilt für jede (geordnete) Basis B und V und $A={}_B\varphi_B=(a_{ij})$ ...
[Leibniz $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}(\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdot...\cdot a_{\sigma(n),n})$, unten erster Summand über σ=1, zweiter über σ=(1 2)]

$$p_\varphi(t)=p_A(t)=\det(t\cdot I_n-A)=\begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & t-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Leibniz}}{=}(t-a_{11})(t-a_{22})\cdot...\cdot(t-a_{nn})+(-1)(-a_{12})(-a_{21})(t-a_{33})\cdot...\cdot(t-a_{nn})+\text{Term (Polynome über t gerade }\leq n-2)$$

$$=[\text{ausmultiplizieren}]t^n-(\sum_{i=1}^n a_{ii})t^{n-1}+c_{n-2}t^{n-2}+...+c_1t+c_0\ [c_i \text{ sind komplexer auszurechnen}]$$

Definiere $\mathbf{Spur(A)}:=\sum_{i=1}^n a_{ii}=\mathrm{Spur}(\varphi)$ [Spur eines Endomormphismus über Wahl einer Basis, aber Basis egal]

Setze t=0: $p_\varphi(0)=p_A(0)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)$ und damit $c_0=(-1)^n\det(A)$

Ergebnis (11.6)

Sei $\dim_K(V)=n\in\mathbb{N}_+$. Dann charakteristisches Polynom von φ ...
$p_\varphi(X)=\det(X\cdot id_V-\varphi)=X^n-\mathrm{Spur}(\varphi)\cdot X^{n-1}+...+(-1)^n\det(\varphi)$, wobei "..." unbekannt
Ist $A={}_B\varphi_B$ bezüglich einer Basis B von V, so ist $p_\varphi(X)=p_A(X)=\det(X\cdot I_n-A)$, $\mathrm{Spur}(\varphi)=\mathrm{Spur}(A)$, $\det(\varphi)=\det(A)$
Die Wurzeln (Nullstellen) von p_φ sind gerade die Eigenwerte von φ.

Beweis

Fasse A als Matrix über K[X] [Polynomring] auf.
$\lambda\in K$ Eigenwert von $\varphi \overset{11.2}{\Leftrightarrow} \det(\lambda\cdot id_V-\varphi)=0 \Leftrightarrow p_\varphi(\lambda)=0$

Beispiele (11.7)

Sei $\dim_K(V)=n\in\mathbb{N}_+$.

(a) Ist $\varphi=id_V$ [also Einheitsmatrix], so ist $p_\varphi(X)=\begin{vmatrix} X-1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X-1 \end{vmatrix}=(X-1)^n$

Ist φ=0 (Nullendomorphismus, alle gehen auf 0, einziger Eigenwert 0), so $p_\varphi(X)=X^n$

(b) **n=2**
$p_\varphi(X)=X^2-\mathrm{Spur}(\varphi)\cdot X+\det(\varphi)\cdot X^0$

Ist $A={}_B\varphi_B$ bezüglich einer Basis B von V, etwa $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, so ...

$p_\varphi(X)=p_A(X)=X^2\text{-Spur}(A)\cdot X+\det(A)\cdot I_2=X^2-(a_{11}+a_{22})\cdot X+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\cdot I_2$
$p_A(A)=A^2\text{-Spur}(A)\cdot A+\det(A)\cdot I_2=0$ (nach Übungsaufgabe 60)

(c) **n=3** [Hier werden die Nullstellen komplex]

φ gegeben bezüglich einer Basis B von V [geht nur in Sonderfällen] ...

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(X)=\begin{vmatrix} X-2 & -1 & 0 \\ -1 & X-2 & -3 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix}=(X-2)^2(X-1)+3+0+3(X-2)-(X-1)-0=X^3-5X^2+10X-6$$

Erkenne Eigenwert $\lambda_1=1$ von A (schwierig anzusehen) ...

$$\text{rang}(1\cdot I_3-A)=\text{rang}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=2\ (<3)$$

Damit Nullstelle des Polynoms (prüfbar über Einsetzen $p_A(1)=1^3-5\cdot 1^2+10\cdot 1-6=0$).
Polynomdivision ...

$(X^3-5X^2+10X-6) : (X-1) = (X^2-4X+6)$
$-(X^3-X^2)$
$\quad -4X^2+10X$
$\quad -(-4X^2+4X)$
$\qquad 6X-6$
$\qquad -(6X-6)$
$\qquad\quad 0$

Sei $\text{char}(K)\neq 2$ [etwa $K=\mathbb{R}$, also $1+1\neq 0$], Wurzeln von X^2-4X+6 sind dann ...

$$\lambda_{2,3}=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2}=2\pm\sqrt{-2}$$

In $\mathbb{R}$ gibt es also keine weiteren Eigenwerte, damit ist für $K=\mathbb{R}$ $\lambda_1=1$ der einzige Eigenwert von A.

(d) Ist φ eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einer Basis B von V zugeordnet ...

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

... so gilt $p_\varphi(X)=p_A(X)=\prod_{k=1}^{n}(X-a_{kk})$

Minimalpolynom (11.8)

Sei $\dim_K(V)=n\in\mathbb{N}_+$. Betrachte ...

$K[\varphi]:=\langle\varphi^0=\text{id}_V,\varphi,\varphi^2,\varphi^3,\dots,\varphi^k,\dots\rangle_K$, $k\in\mathbb{N}$ $(\subseteq\text{End}_K(V))$
Es ist $\text{End}_K(V)\cong M_n(K)$ (via Basiswahl), also $\dim_K(\text{End}_K(V))=n^2$.

Sei $r:=\dim_K(K[\varphi])$, dann $1\leq r\leq n^2$.
$r=1 \Leftrightarrow \varphi=c\cdot\varphi^0=c\cdot\text{id}_V$, $c\in K$ Skalarmultiplikation [Polynom normiert, daher $\varphi+d_0\varphi^0$]
$r=2 \Leftrightarrow \varphi^0=\text{id}_V$ und φ linear unabhängig $\Rightarrow \varphi^2=$Linearkombination von φ^0 und φ [da normiert $\varphi^2+d_1\varphi^1+d_0\varphi^0$]

Folglich sind (im allgemeinen) $\varphi^0,\varphi,\dots,\varphi^{r-1}$ linear unabhängig in $\text{End}_K(V)$ und $\varphi^r=\sum_{k=0}^{r-1}c_k\varphi^k$.

Dabei sind die $c_k\in K$ eindeutig bestimmt (durch φ).
Definiere ...
$m_\varphi:=X^r-c_{r-1}X^{r-1}-\dots-c_1X-c_0X^0\in K[X]$ [also 0 wenn φ eingesetzt]

Einsetzen von φ in $m_\varphi(X)$ [$X\mapsto\varphi$, $X^0\mapsto\varphi^0=\text{id}_V$] ...
$m_\varphi(\varphi)=0$ $(\in\text{End}_K(V))$
$m_\varphi(X)$ ist (nach Konstruktion) das **normierte Polynom** (Leitkoeffizient 1) minimalen Grades $r\geq 1$ mit $m_\varphi(\varphi)=0$.
Es gilt ...
$r=\text{grd}(m_\varphi)=\dim_K(K[\varphi])$; $K[\varphi]$ ist ein kommutativer Teilring von $\text{End}_K(V)$ mit 1 $(=\text{id}_V)$
(Einsetzen entspricht Homomorphismus $K[X]\to K[\varphi]$)

Entsprechende Definition $m_A(x)$ für $A\in M_N(K)$ [$m_A=m_\varphi$, falls $A={}_B\varphi_B$ bezüglich irgendeiner Basis B von V]

Satz (11.9)

Sei $\dim_K(V)=n\in\mathbb{N}_+$.
Die Eigenwerte von φ sind gerade die Wurzeln von $m_\varphi(X)$ in K.

Beweis

Sei $t\in K$. Polynomdivision ...
$m_\varphi(X)=q(X)(X-t)+r(X)$
$q,r\in K[X]$, $grd(r)=0$, d. h. $r(X)=cX^0$ mit $c\in K$ (t Wurzel von $m_\varphi \Leftrightarrow c=0$, d. h. Rest 0)
Ferner ...
$grd(q)<grd(m_\varphi)$ [$q(\varphi)\neq 0$ nach Definition von m_φ]
Einsetzen von φ ...
$0=m_\varphi(\varphi)=q(\varphi)\circ(\varphi-t\cdot id_V)+c\cdot id_V$
Ist $t=\lambda$ ein Eigenwert von φ, so existiert $0\neq u\in V$ mit $(\varphi-\lambda\cdot id_V)(u)=0$ (u Eigenvektor von φ zu λ) und
$0=m_\varphi(\varphi)(u)=q(\varphi)\circ(\varphi-t\cdot id_V)(u)+(c\cdot id_V)(u)=q(0)+c\cdot u=0+c\cdot u$, also $c=0$
Ist umgekehrt t Wurzel von $m_\varphi(X)$, so ist $c=0$ [Rest 0], und es existiert $v\in V$ mit $u:=q(\varphi)(v)\neq 0$ [also neues Polynom nicht Null], dann $0=m_\varphi(\varphi)(v)=q(\varphi)\circ(\varphi-t\cdot id_V)(v)=(\varphi-t\cdot id_V)(u)$, u Eigenvektor von φ zum Eigenwert t
[$\circ$ ist hier (Kom) da (Kom) Teilring]

Diagonalisierbarkeit (11.10)

Sei $\dim_K(V)=n\in\mathbb{N}_+$.
φ diagonalisierbar (diagonalähnlich) $:\Leftrightarrow \exists$ Basis B von V aus Eigenvektoren von φ

$\Leftrightarrow \exists$ Basis B von V mit ${}_B\varphi_B=\begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix

Ist dies der Fall, so ist $p_\varphi(X)=\prod_{k=1}^{n}(X-c_k)$ (vergleiche 11.7 (d)).
Seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ die verschiedenen unter den c_k; Sei $n_j=\dim_K(V_{\varphi,\lambda_j})$ (Eigenraum)
Dann (nach eventueller Umordnung von B) ...

${}_B\varphi_B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$ [oberer Teil n_1, unterer Teil n_r], also $p_\varphi=\prod_{j=1}^{r}(X-\lambda_j)^{n_j}$; $m_\varphi(X)=\prod_{i=1}^{r}X-\lambda_i$

[noch zusätzliche Punkte dazwischen]

[$\exists$ n paarweise verschiedene Eigenwerte bei $\dim_K(v)=n \Rightarrow \varphi$ diagonalisierbar [da l.u., Aufgabe 70 (b)] [nicht $\not\Leftarrow$!]]

Bemerkung

(ohne Beweis)

Hier gilt auch die "Umkehrung".

Satz (11.2)

Hat φ n verschiedene Eigenwerte, so ist φ diagonalisierbar.

Übungen 13 (Benjamin Schnaidt)

[...]

Aufgabe 66

$\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ bezüglich kanonischer Basis

(a) **Charakteristisches Polynom $p_\varphi(X)=p_A(x)$**

$p_\varphi(X)=p_A(X)=\det(A-X\cdot I_2)=\det(\begin{pmatrix} 1-X & 0 \\ -2 & 3-X \end{pmatrix})=(1-X)\cdot(3-X)$ [im Skript normalerweise umgekehrt, d. h. $X\cdot I_2-A$, macht aber für Eigenwerte keinen Unterschied da $\tilde{p}_A(X)=(-1)^n p_A(X)$; `charpoly(A,x)` liefert Ergebnis wie im Skript, nicht wie hier]

(b) **Eigenwerte von φ bzw. A**

Nullstellen von p_φ bzw. von p_A, also $\lambda_1=1$ und $\lambda_2=3$.

(c) **Eigenräume von φ bzw. A**

Löse $(A-\lambda I_2)\cdot x=0$, d. h. bestimmte $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_2)=V_{\varphi,\lambda}$

$V_{\varphi,1}$: $(A-1\cdot I_2)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{\varphi,1}=\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$

$V_{\varphi,3}$: $(A-3\cdot I_2)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{\varphi,1}=\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$

(d) **Minimalpolynom $m_\varphi(X)=m_A(X)$**

Da A linear unabhängig von I_2 ist ($\lambda_1\cdot A^1+\lambda_2\cdot A^0=\lambda_1\cdot A^1+\lambda_2\cdot I_2\neq 0\ \forall\ (\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$) muß das Minimalpolynom m_φ mindestens Grad 2 haben. Wegen $m_\varphi | p_\varphi$ (Cayley-Hamilton) folgt $m_\varphi=q_\varphi$.

Tatsächlich ist $p_A(A)=(I_2-A)(3I_2-A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$

φ diagonalähnlich?

φ ist diagonalähnlich, da $B=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von φ ist, ${}_B\varphi_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 67

Analog zu Aufgabe 66

Aufgabe 68

$\varphi \subseteq \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0 einziger Eigenwert von φ

$\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von φ (bzw. A) $\Leftrightarrow$ $(A-\lambda I_3)$ nicht invertierbar

Wegen $\det(A-\lambda I_3)=\det(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix})=-\lambda^3\neq 0$ für $\lambda\neq 0$ ist $A-\lambda I_3$ für $\lambda\neq 0$ immer invertierbar $\Rightarrow$ 0 einziger Eigenwert von φ.

Charakteristisches Polynom

$p_\varphi(X)=\det(A-XI_3)=-X^3$

Minimalpolynom

Es ist $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{I_3,A,A^2\}$ linear unabhängig, also muß $\mathrm{grd}(m_\varphi)>2$ gelten

$\Rightarrow m_\varphi(X)=X^3$ (wegen $m_\varphi | p_\varphi$) [`minpoly(A,x)` in `linalg`]

Eigenraum $V_{\varphi,0}$

$$(A-0\cdot I_3)x=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2+2x_3=0 \\ 2x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_2=x_3=0$$

$$\Rightarrow V_{\varphi,0}=\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalähnlich?

Wäre φ diagonalähnlich, müßte es eine Eigenwert-Basis von φ des $\mathbb{R}^3$ geben, aber es ist $\dim(V_{\varphi,0})=1<3 \Rightarrow \varphi$ ist nicht diagonalähnlich.

Aufgabe 69

A,B n×n-Matrizen über Körper K

(a) **Spur(AB)=Spur(BA)**

$$\mathrm{Spur}(AB)=\sum_{i=1}^{n} (A\cdot B)_{ii}=[\text{da nur Hauptdiagonale}]\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}b_{ji}))=\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}))=\sum_{j=1}^{n} (B\cdot A)_{jj}=\mathrm{Spur}(BA)$$

(b) **A,B ähnlich ⇒ Spur(A)=Spur(B)**

A,B ähnlich $\Rightarrow \exists\, S\in GL_n(\mathbb{K}),\ A=S^{-1}BS$

$$\Rightarrow \mathrm{Spur}(A)=\mathrm{Spur}(S^{-1}BS)=\sum_{i=1}^{n} (S^{-1}BS)_{ii}=\sum_{i} (\sum_{k,l} (s^{-1})_{ik}b_{kl}s_{li})=\sum_{k,l} (\sum_{i} (s_{li}(s^{-1})_{ik})b_{kl}) \quad |\ \text{Mit} \sum_{i} (s_{li}(s^{-1})_{ik})=(S\cdot S^{-1})_{lk}=\delta_{lk}$$

$$=\sum_{k,l} (\delta_{lk}b_{kl})=[\text{da } \delta \text{ Einheitsmatrix}]\sum_{k} (b_{kk})=\mathrm{Spur}(B)$$

Andere Lösungsmöglichkeit ...

Für das charakteristishe Polynom einer Matrix A gilt $p_A(X)=\det(A-XI_n)=(-X)^n+\mathrm{Spur}(A)(-X)^{n-1}+...+\det(A)$

D. h. ±Spur(A) ist der Koeffizient von X^{n-1} in $p_A(X)$. Nun folgt aus dem Determinanten-Multiplikationssatz ...

$\det(A-XI_n)=\det(S^{-1}BS-XI_n)=\det(S^{-1}BS-S^{-1}XI_nS)=\det(S^{-1}(B-XI_n)S)=\det(S^{-1})\det(S)\det(B-XI_n)=\det(B-XI_n)$

D. h. ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom $p_A(X)=p_B(X)$, Koeffizientenvergleich (vor $(-X)^{n-1}$) liefert daher Spur(A)=Spur(B).

Aufgabe 70

$A\in M_n(K)$, charakteristisches Polynom zerfällt über K in Linearfaktoren $p_A(X)=\prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)=\det(XI_n-A)$

(a) Behauptung: $\lambda_i\in K$ paarweise verschieden ⇒ A ähnlich zu Diagonalmatrix

Beweis

Die λ_i's sind (per Definition von $p_A(X)$) die Eigenwerte von A und zu jedem λ_i gibt es (mindestens) einen Eigenvektor $v_i\neq 0$. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Sind daher alle λ_i paarweise verschieden, erhalten wir n linear unabhängige Eigenvektoren $\{v_1,...,v_n\}$, d. h. eine Eigenvektorbasis des $\mathbb{K}^n \Rightarrow \mathbb{K}^n=\oplus V_{A,\lambda_i}$, d. h. A ist diagonalähnlich, $SAS^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (wobei die Spalten von S^{-1} gerade die v_i's sind).

(b) Behauptung: $\mathrm{Spur}(A)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ auch wenn λ_i nicht verschieden

Beweis

Es gilt $p_A(X)=X^n-\mathrm{Spur}(A)X^{n-1}+...+(-1)^n\det(A)$

Andererseits ...

$$\tilde{p}_A(X)=\prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)=X^n-(\lambda_1+...+\lambda_n)X^{n-1}+...$$

Koeffizientenvergleich $\mathrm{Spur}(A)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

α AFFINE GEOMETRIE EINES VEKTORRAUMS (12)

Stets V ein K-Vektorraum, $\dim_K(V)=n\in\mathbb{N}_+$

β "Geometrie" (12.1)

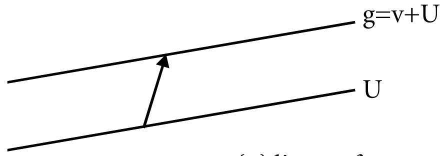
(Euklid, Gauß, Riemann, Hilbert)

Struktur (P,G,...,I) bestehend ...
P = Menge der "Punkte"
G = Menge der "Geraden"
⋮
I = Inzidenzrelation ($I\subseteq P\times G$, $(p,g)\in I$ oder pIg heißt p liegt auf g)

Mögliche weitere Relationen ...
Abstand (Metrik), Winkel, Anordnung, Topologie (Körper)

β Affine Geometrie von V (12.2)

$A(V)=(P,G,..,\subseteq)$, wobei ...
$P=\{\{V\}\mid v\in V\}$ 0-dimensionale affine Teilräume von V [{v} ?]
$G=\{v+U\mid U$ 1-dimensionaler Teilraum, $v\in V\}$ 1-dimensionaler affiner Teilraum von V
⋮
$A(V)=A^n(K)$ (via Basiswahl)



{v} liegt auf g

Bemerkung

Lösungsmenge L(A,b) von Ax=b ist entweder leer oder ein affiner Teilraum.

β Affine lineare Gruppe (12.3)

AGL(V)$=\{f_{\varphi,u}\mid\varphi\in GL(V), u\in V\}$ [$GL_n(K)$:=Gruppe aller **regulären** n×n-Matrizen; $GL(V)\cong GL_n(K)$], wobei ...
$f_{\varphi,u}(v)=\varphi(v)+u$
$[v]=\{f_{id_V,u}\mid u\in V\}\cong(V,+)$ **Translationsgruppe** (verschieben)

$AGL(V)\cong AGL_n(K)$ via Basiswahl.

Beispiel n=1
$AGL_1(K)=\{x\mapsto ax+b\mid x,a,b\in K, a\neq 0\}$
AGL(v) [AGL(V)?] "**Kollineationsgruppe**" [drei Punkte kollinear, wenn sie auf derselben Geraden liegen] auf $\mathbb{A}(V)$ [$\mathbb{A}$ für Affiner Raum] ("voll" für $K=\mathbb{R}$)

β Affine Ebenen (12.4)

(P,G,I) affine Ebene, falls gilt ...

(A1) Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Verbindungsgerade.

(A2) Es gibt 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

(A3) Zu einer Geraden g und einem Punkt p außerhalb, gibt es genau eine Gerade g' durch p, die keinen Schnittpunkt mit g gemeinsam hat ("Parallelenaxiom")

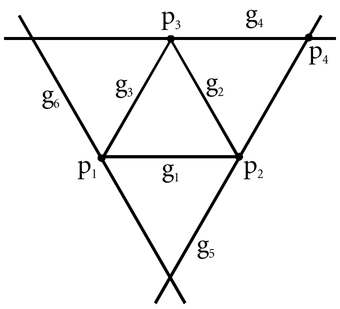
Beispiel

$\mathbb{A}^2(K)$ ist eine affine Ebene.

Andere Beschreibung

$\mathbb{A}^2(K)=(K^2,G,E)$, wobei ...
$G=\{g_b, g_{m,b} \mid m,b\in K\}$
$g_b=\{ (b,y) \mid y\in K\}$ senkrechte Geraden (Steigung ∞)
$g_{m,b}=\{(x,y) \mid y=mx+b\}$ Gerade mit Steigung m

Kleinstes Modell

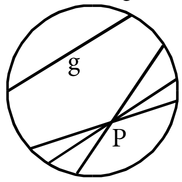


$g_4 \| g_1$ und $g_5 \| g_3$ und $g_6 \| g_2$
$\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_2)$ 4 Punkte, 6 Geraden-Ebene ($|\mathbb{F}_2{}^2|=4$, $|\text{Geradenmenge}|=6$)

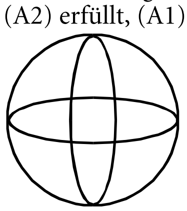
Andere ebene Geometrien (12.5)

(a) Parabolenebene
$(\mathbb{K}^2,G,E)$, wobei ...
$G=\{g_b,g_{a,b} \mid a,b\in K\}$
g_b wie in 12.4
$g_{a,b}=\{(x,y) \mid y-b=(x-a)^2\}$ [Parabelförmig]
(A1), (A2), (A3) gelten
Bemerkung
$(\mathbb{K}^2,G,E) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ via $(x,y)\mapsto(x,y+x^2)$

(b) Hyperbolische Ebene (F. Klein)
Einschränkung von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ auf $B=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$
(A1), (A2) gelten, aber (A3) nicht (unendlich viele Parallelen)



(c) Sphärische Geometrie
Punktmenge$=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\})=S^2$ (2-Sphäre)
Geradenmenge=Großkreise; Inzidenz E
(A2) erfüllt, (A1) nicht, (A3) nicht (2 Schnittpunkte)



(d) Riemannsche Geometrie
Gerade = Kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf einer Fläche

PROJEKTIVE GEOMETRIE EINES VEKTORRAUMS (13)

Stets V ein K-VR, $\dim_K(V)=n\in\mathbb{N}_+$

Projektive Geometrie von V (13.1)

$\mathbb{P}(V)=(P,G,\ldots,\subseteq)$, wobei ...

$P=\{$1-dim Teilraum von V$\}=\{K_v=\langle v\rangle \mid 0\neq v\in V\}$, projektive Punkte (=0-dim-projektive Teilräume)

$G=\{$2-dim Teilräume von V$\}$ projektive Geraden (=1-dim-projektive Teilräume)

$\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}^{n-1}(K)$ via Basiswahl

Homogene Koordinaten (13.2)

Ordne jedem projektiven Punkt ...

$p=K\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ in $\mathbb{P}^{n-1}(K)$

... die homogenen Koordinaten (Verhältniskoordinaten) zu ...

$p=[x_1,\ldots,x_n]$ (nicht alle $x_i=0$)

$\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}^{n-1}(K)$ via Basiswahl ($\dim_K(V)=n$)

Projektiver Punkt $p=K\cdot v=K\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=[x_1,\ldots,x_n]$ (homogene Koordinaten), $0\neq v\in V$, mindestens ein $x_i\neq 0$

$[x_1,\ldots,x_n]=[y_1,\ldots,y_n] \Leftrightarrow$ Es gibt $0\neq c\in K$, $y_i=cx_i\ \forall\ i$

Beispiel

Ist $x_n\neq 0$, so $[x_1,\ldots,x_n\}=[\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n};1]$

Projektive lineare Gruppe

$PGL(V)=\{\tilde{\varphi} \mid \varphi\in GL(V)\}$, wobei ...

$\tilde{\varphi}(K\cdot v)=K\cdot\varphi(v)\ [=\varphi(K\cdot v)]\ (0\neq v\in V)$

PGL(V) ist eine "Kollineationsgruppe" von $\mathbb{P}(V)$.

$PGL(V)=PGL_n(K)$ via Basiswahl, ordne jedem $A\in GL_n(K)$ die Abbildung $\tilde{A}$ zu mit ...

$\tilde{A}([x_1,\ldots,x_n]):=[y_1,\ldots,y_n]$ [oder auch $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ geschrieben]

... falls $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$.

($PGL_n(K)=GL_n(K)$ modulo Skalarmatrizen, vergleiche Übung 74)

Projektive Ebenen (13.4)

(P,G,I) heißt projektive Ebene, falls gilt ...

(P1) Zu je 2 verschiedenen Punkten gibt es genau eine Verbindungsgerade (entspricht (A1))

(P2) Es gibt (mindestens) 4 Punkte, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen

(P3) Je 2 verschiedene Geraden haben genau einen Schnittpunkt